stucom

www.stucom.com

Homologat i concertat per
la Generalitat de Catalunya

MATÈRIA:

MATEMÀTIQUES

CRÈDIT ZERO

- **Repàs teòric**
- **Exercicis**

Dept. de Ciències

Estudis: 1r BATXILLERAT

1. OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS

$$\begin{bmatrix} & \text{RECORDA:} & \\ -(a) = -a & & -(-a) = a \\ (-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -a\cdot b = -ab & & (-a)\cdot(-b) = a\cdot b = ab \\ a-(b+c-d) = a-b-c+d & & a\cdot(b+c-d) = ab+ac-ad \end{bmatrix}$$

EXEMPLES

E1.1: $3-(-5)+(-7) = 3+5-7 = 8-7 = 1$

E1.2: $5-[-2-(-1)+7] = 5-[-2+1+7] = 5-[8-2] = 5-[6] = 5-6$
$= -1$
Una altra manera de fer E1.2: $5-[-2+1+7] = 5+2\ -\ 1-7 = 7-8 = -1$

E1.3: $[8-(-3)-5+(-7)]-[-2-(-1)] = [8+3-5-7]-[-2+1]$
$= [11-12]-[-1] = -1+1 = 0$
Una altra manera de fer E1.3: $= 8+3-5-7+2-1 = 13-13 = 0$

E1.4: $2\cdot[3-(-5)-6+(-4)]-3\cdot[8+(-3)-9]$
$= 2\cdot[3+5-6-4]-3\cdot[8-3-9] =$
$= 2\cdot[8-10]-3\cdot[8-12] = 2\cdot[-2]-3\cdot[-4] = -4+12 = 8$
Una altra manera de fer E1.4: $= 6+10-12-8-24+9+27 = 52-44 = 8$

2. OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS I FRACCIONARIS

RECORDA:

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c} \qquad \frac{a}{b} \pm c = \frac{a \pm bc}{b} \qquad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} \qquad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad a : \frac{b}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \qquad \frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

EXEMPLES

$E2.1: \quad 2 - \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 3 - 5}{3} = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$

$E2.2: \quad -3 - \frac{8}{5} = \frac{-3 \cdot 5 - 8}{5} = \frac{-15-8}{5} = \frac{-23}{5}$

$E2.3: \quad \frac{1}{6} - 2 = \frac{1 - 6 \cdot 2}{6} = \frac{1-12}{6} = \frac{-11}{6}$

$E2.4: \quad \frac{-3}{4} + 1 = \frac{-3 + 4 \cdot 1}{4} = \frac{-3+4}{4} = \frac{1}{4}$

$E2.5: \quad 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$

(Es simplifica, si es pot dividir numerador i denominador pel mateix nombre)

$E2.6: \quad \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ATENCIÓ: $\frac{a}{1} = a$ *)*

$E2.7: \quad \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 : \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

$E2.8: \quad \frac{\frac{5}{3}}{6} = \frac{5}{3} : 6 = \frac{5}{3 \cdot 6} = \frac{5}{18}$

3. OPERACIONS AMB FRACCIONS

RECORDA:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \textit{però si b i d tenen divisors comuns és millor fer la regla del m.c.m.}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{\frac{m}{b} \cdot a}{m} \pm \frac{\frac{m}{d} \cdot c}{m} = \frac{h \cdot a \pm k \cdot c}{m} \qquad \begin{pmatrix} m: \ m.c.m. \ de \ b \ i \ d \\ h = \frac{m}{b} \quad i \quad k = \frac{m}{d} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

EXEMPLES

$$E3.1: \quad \frac{4}{3} + 2 - \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 4}{6} + \frac{6 \cdot 2}{6} - \frac{1 \cdot 5}{6} = \frac{8}{6} + \frac{12}{6} - \frac{5}{6} = \frac{8 + 12 - 5}{6} = \frac{15}{6}$$

$$E3.2: \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{10} - \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 3}{20} + \frac{2 \cdot 1}{20} - \frac{5 \cdot 5}{20} = \frac{12}{20} + \frac{2}{20} - \frac{25}{20} = \frac{12 + 2 - 25}{20} = \frac{-11}{20}$$

$$E3.3: \quad \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \qquad E3.4: \quad \frac{\frac{4}{3}}{\frac{-2}{9}} = \frac{4}{3} : \frac{-2}{9} = \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot (-2)} = \frac{36}{-6} = -6$$

4. POTÈNCIES

RECORDA:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a \ \ (n\ vegades) \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (-a)^{2n} = a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \qquad \begin{matrix} 2n\ nombre\ parell \\ 2n+1\ \ "\ \ \ senar \end{matrix}$$

EXEMPLES

$$E4.1: \quad \frac{2^6 \cdot 5^4 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^5} = 2^{6-2} \cdot 3^{3-5} \cdot 5^{4-5} = 2^4 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-1} \ (també\ es\ pot\ posar) \Rightarrow \frac{2^4}{3^2 \cdot 5} = \frac{16}{9 \cdot 5} = \frac{16}{45}$$

$$E4.2: \quad \left(\frac{3^2 \cdot 2^6}{2^3 \cdot 3^4}\right)^2 = \left(2^3 \cdot 3^{-2}\right)^2 = \left(2^3\right)^2 \cdot \left(3^{-2}\right)^2 = 2^6 \cdot 3^{-4} \ \ ó \Rightarrow \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81}$$

$$Una\ altra\ manera\ de\ fer\text{-}ho: \frac{3^4 \cdot 2^{12}}{2^6 \cdot 3^8} = 2^6 \cdot 3^{-4}$$

$$E4.3: \quad \left[(-1)^3\right]^4 = (-1)^{12} = 1 \qquad E4.4: \quad \left(-1^2\right)^3 = (-1)^3 = -1 \qquad E4.5: \quad \left[(-1)^5\right]^3 = (-1)^{15} = -1$$

5. OPERACIONS AMB EXPRESSIONS RADICALS (ARRELS)

RECORDA:

$$r^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = r \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^n} = a \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Reducció a índex comú : (per poder multiplicar o dividir arrels de diferent índex)

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p} \qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[p]{a^{\frac{p}{n}}}\cdot\sqrt[p]{b^{\frac{p}{m}}} = \sqrt[p]{a^h\cdot b^k} \qquad \begin{pmatrix} p : m.c.m. de\ n\ i\ m \\ h = \dfrac{p}{n} \qquad k = \dfrac{p}{m} \end{pmatrix}$$

Introducció i extracció de factors en una expressió radical :

$$a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\cdot b} \qquad \frac{1}{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{b}}{a} = \sqrt[n]{\frac{b}{a^n}} \qquad \sqrt[n]{a^{n+k}} = a^p\cdot\sqrt[n]{a^q}$$

$$p, \text{quocient de la divisió } \frac{n+k}{n} \text{ i } q, \text{ residu de la mateixa divisió}$$

Racionalització de radicals :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{b} \qquad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}}\cdot\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a}{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{ab} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b^{n-1}}{b^{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$$

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{1}{a+\sqrt{b}}\cdot\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$$

EXEMPLES

$$E5.1:\quad \frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[4]{24}}{\sqrt[6]{18}}\ \textit{(reducció a índex comú)} \Rightarrow \frac{\sqrt[12]{12^4}\cdot\sqrt[12]{24^3}}{\sqrt[12]{18^2}}=\sqrt[12]{\frac{12^4\cdot 24^3}{18^2}}\ \textit{(simplificació i}$$

$$\textit{extracció de factors)} \Rightarrow \sqrt[12]{\frac{(2^2\cdot 3)^4\cdot(2^3\cdot 3)^3}{(2\cdot 3^2)^2}}=\sqrt[12]{\frac{2^8\cdot 3^4\cdot 2^9\cdot 3^3}{2^2\cdot 3^4}}=\sqrt[12]{\frac{2^{17}\cdot 3^7}{2^2\cdot 3^4}}=\sqrt[12]{2^{15}\cdot 3^3}=$$

$$=\sqrt[4]{2^5\cdot 3}=2\cdot\sqrt[4]{2\cdot 3}=2\cdot\sqrt[4]{6}$$

$$E5.2:\quad \sqrt{6\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{12}}}}=\sqrt{\sqrt[3]{6^3\cdot\frac{4}{9}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{12}}}}=\sqrt[6]{\sqrt[4]{(6^3)^4\cdot\frac{4^4}{9^4}\cdot\frac{1}{12}}}=\sqrt[24]{\frac{6^{12}\cdot 4^4}{9^4\cdot 12}}=\sqrt[24]{\frac{(2\cdot 3)^{12}\cdot(2^2)^4}{(3^2)^4\cdot 2^2\cdot 3}}=$$

$$=\sqrt[24]{\frac{2^{12}\cdot 3^{12}\cdot 2^8}{3^8\cdot 2^2\cdot 3}}=\sqrt[24]{\frac{2^{20}\cdot 3^{12}}{2^2\cdot 3^9}}=\sqrt[24]{2^{18}\cdot 3^3}=\sqrt[8]{2^6\cdot 3}$$

$E5.3:$ *(Suma de radicals semblants)*

$$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[6]{27}=\otimes$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3} & \sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3} \\ \sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 5^2}=5\sqrt{3} & \sqrt[6]{27}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3} \\ \sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3} & \end{array}\right\}\ \otimes=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=$$

$$=(2+5-3+1+1)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

6. POLINOMIS

RECORDA:

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *i* $b_2x^2 + b_1x + b_0$ *són polinomis*

Les a_i *i les* b_j *són els coeficients numèrics (constants)*

x *és la indeterminada o variable (pot prendre qualsevol valor numèric)*

Els exponents de la x *indiquen el grau de cada terme o sumand del polinomi i l'exponent més gran indica el grau del polinomi.*

Als exemples repasarem les operacions amb polinomis

EXEMPLES

E6.1: (Suma i resta de polinomis i multiplicació de polinomis per nombres)

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = \qquad 3x^2 - 5x + 7 \\ Q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 3x - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} P(x) + Q(x) = 2x^3 + 11x^2 - 2x + 1 \\ P(x) - Q(x) = -2x^3 - 5x^2 - 8x + 13 \\ 6P(x) = 18x^2 - 30x + 42 \\ -4Q(x) = -8x^3 - 32x^2 - 12x + 24 \\ 6P(x) - 4Q(x) = -8x^3 - 14x^2 - 42x + 66 \end{cases}$$

E6.2: *(Multiplicació de polinomis)*

$$\begin{array}{lr} Q(x): & 2x^3 + 8x^2 + 3x - 6 \\ P(x): & \times \quad 3x^2 - 5x + 7 \\ \hline & 14x^3 + 56x^2 + 21x - 42 \\ & -10x^4 - 40x^3 - 15x^2 + 30x \qquad \\ & 6x^5 + 24x^4 + 9x^3 - 18x^2 \qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

$$P(x) \cdot Q(x) = 6x^5 + 14x^4 - 17x^3 + 23x^2 + 51x - 42 = R(x)$$

$E6.3:\quad P(x)\cdot Q(x)=R(x)\ \Rightarrow\ \dfrac{R(x)}{P(x)}=Q(x)\quad (divisió\ \ de\ \ polinomis)$

$$
\begin{array}{llll}
R(x): & 6x^5+14x^4-17x^3+23x^2+51x-42 & | & 3x^2-5x+7\ :\ P(x) \\
 & \underline{-6x^5+10x^4-14x^3} & & 2x^3+8x^2+3x-6\ \ :Q(x) \\
 & /\quad +\ 24x^4-31x^3+23x^2 & & \\
 & \quad \underline{-24x^4+40x^3-56x^2} & & \\
 & \quad /\quad +9x^3-33x^2+51x & & \\
 & \quad\quad \underline{-9x^3+15x^2-21x} & & \\
 & \quad\quad /\quad -18x^2+30x-42 & & \\
 & \quad\quad\quad \underline{+18x^2-30x+42} & & \\
 & \quad\quad\quad\quad /\quad /\quad / & &
\end{array}
$$

En aquesta divisió el RESIDU és zero $\Rightarrow$ és una DIVISIÓ EXACTA.

$E6.4:$ (Regla de Ruffini: es fa servir en les divisions en que el DIVISOR és de la forma $x \pm a$)

La divisió:

$$
\begin{array}{lll}
3x^3+5x^2-7x-2 & | & x+\ 3 \\
\underline{-3x^3-9x^2} & & 3x^2-4x+5 \\
/\quad -4x^2-7x & & \\
\quad \underline{+4x^2+12x} & & \\
\quad /\quad +5x-2 & & \\
\quad\quad \underline{-5x-15} & & \\
\quad\quad /\ -17 & &
\end{array}
$$

mitjançant la Regla de Ruffini, és fa d'aquesta altra manera:

DIVISOR		DIVIDEND		
$(x+3)$	3	5	-7	-2
-3		-9	$+12$	-15
	3	-4	$+5$	$-17 = RESIDU$

QUOCIENT

RECORDA:

TEOREMA DEL RESIDU DE RUFFINI:

• *Valor numèric d'un polinomi en un punt*: *Donat un polinomi* $P(x)$ *el seu valor numèric en* $x=a$, *és el resultat de subtituir* $\underline{x}$ *per* $\underline{a}$ *en el polinomi i operar. Ho anomenarem* $P(a)$.

• *Teorema del residu*: *El residu de dividir un polinomi* $P(x)$ *entre un binomi del tipus* $(x-a)$ *és exactament* $P(a)$, *el valor numèric del polinomi en el punt* $\underline{a}$.

EXEMPLES

E6.5: Calculem el valor numèric del polinomi $P(x)=-x^3+3x^2-12x+5$ *en el punt* -2,

$$P(-2)=-(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+5=-(-8)+3\cdot 4+24+5=49$$

E6.6: Calculem el residu de la divisió del polinomi $P(x)=-x^3+3x^2-12x+5$ *al dividirlo entre* $(x+2)$,

Si dividim entre $x+2$, *vol dir que* $x=-2$, *ja que resulta de resoldre* $x+2=0$, *llavors, segons Ruffini, calculem el valor numèric en el punt* $x=-2$:

$$P(-2)=-(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+5=-(-8)+3\cdot 4+24+5=49 \quad \rightarrow \quad residu=49$$

Comprovació:

	-1	3	-12	5
-2		$+2$	-10	$+44$
	-1	5	-22	$+49$

E6.7: Trobar el valor del paràmetre $\underline{t}$ *perquè al dividir el polinomi* $3x^4+4x^2+x-\underline{t}$ *entre* $x-3$ *el residu sigui* 25.

$$\left\{\begin{array}{l} P(x)=3x^4+4x^2+x-\underline{t} \\ x-3 \quad\rightarrow\quad x=+3 \end{array}\right\} \rightarrow \quad P(3)=3\cdot(3)^4+4\cdot(3)^2+3-t=25 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 243+36+3-t=25 \quad\rightarrow\quad 282-t=25 \quad\rightarrow\quad 282-25=t \quad\rightarrow\quad \underline{257=t.}$$

Comprovació:

	3	0	4	1	$-t$
3		9	27	93	282
	3	9	31	94	$\boxed{25}$

llavors: $-t+282=25 \quad\rightarrow\quad 282-25=t \quad\rightarrow\quad \underline{257=t.}$

E6.8: Sense fer la divisió, esbrina si els següents polinomis són divisibles entre:

Polinomi	*entre*	*Raonament*	*Divisible*
x^6+1	$x-1$	$P(+1)=1^6+1=2$	*NO*
x^6+1	$x+1$	$P(-1)=(-1)^6+1=1+1=2$	*NO*
x^4-16	$x-2$	$P(+2)=2^4-16=0$	*SI*
x^3-27	$x+3$	$P(-3)=(-3)^3-27=-27-27=-54$	*NO*

7. IDENTITATS NOTABLES

$$\left[\begin{array}{l} \quad\quad\quad RECORDA: \\ (A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2 \\ (A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \\ (A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC \\ (A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 \\ \left(A^2-B^2\right)=(A+B)\cdot(A-B) \end{array}\right]$$

EXEMPLES

$E7.1:\quad (x+3)\cdot(x-3)=x^2-9$

$E7.2:\quad (2x+5)\cdot(2x-5)=(2x)^2-5^2=4x^2-25$

$E7.3:\quad \left(3x^2+2x\right)\cdot\left(3x^2-2x\right)=\left(3x^2\right)^2-(2x)^2=9x^4-4x^2$

$E7.4:\quad (x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=x^2+4x+4$

$E7.5:\quad (x-2)^2=x^2+2\cdot x\cdot(-2)+(-2)^2=x^2-4x+4 \quad\Rightarrow\quad \underline{(A-B)^2=A^2-2AB+B^2}$

$E7.6:\quad \left(2x^3-5x^2\right)^2=\left(2x^3\right)^2-2\cdot 2x^3\cdot 5x^2+\left(5x^2\right)^2=4x^6-20x^5+25x^4$

$E7.7:\quad (x-2)^3=x^3+3x^2\cdot(-2)+3x\cdot(-2)^2+(-2)^3=x^3-6x^2+12x-8 \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad \underline{(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3}$

$E7.8:\quad \left(4x^2+6x-2\right)^2=\left(4x^2\right)^2+(6x)^2+(-2)^2+2\cdot 4x^2\cdot 6x+2\cdot 4x^2\cdot(-2)+2\cdot 6x\cdot(-2)=$

$=16x^4+36x^2+4+48x^3-16x^2-24x=16x^4+48x^3+20x^2-24x+4$

8. FACTOR COMÚ

RECORDA

Propietat distributiva del producte respecte a la suma: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Treure factor comú és el procès contrari a la propietat distributiva:

$a\cdot b+a\cdot c=(*)$

Observem: "a" multiplica (és un FACTOR)

als dos elements de la suma (és COMÚ)

llavors:

$$(*)=a\cdot(1\cdot b+1\cdot c)\overset{escriurem}{=}a\cdot(b+c)$$

EXEMPLES

E 8.1: $(2A+2B)=2\cdot(A+B)$

E 8.2: $(2A+2)=2\cdot(A+1)\ \left(\underline{NO!\,2\cdot(A+0)\,que és igual a\, 2A}\right)$

E 8.3: $(2a+2b)^2=\left(2\cdot(a+b)\right)^2=2^2\cdot(a+b)^2=4\cdot(a+b)^2$

E 8.4: $33a^3bc^2-55a^2b^3c^4=11a^2bc^2\cdot(3a-5b^2c^2)$

E 8.5: $8a^5-12a^3+4a^2=4a^2\cdot(2a^3-3a+1)$

E 8.6: $4x\cdot(x+y)+5x\cdot(x+y)=(x+y)\cdot(4x+5x)=(x+y)\cdot 9x$

E 8.7: $(a+b)\cdot\frac{1}{x}+\ (a+b)\cdot y=\ (a+b)\cdot\left(\frac{1}{x}+y\right)$

E 8.8: $(x^2+y)\cdot(ab-c)+(ab-c)=(ab-c)\cdot(x^2+y+1)$

E 8.9: $x2\ \ \cdot(ay-y)-y+ay=x2\ \ \cdot(ay-y)+(ay-y)=(ay-y)\cdot(x^2+1)$

E 8.10: $(a+b)\cdot(a-b)+(a+b)^2=(a+b)\cdot[(a-b)+(a+b)]=(a+b)\cdot 2a$

10. DESCOMPOSAR EN FACTORS

RECORDA

Per fer descomposicions factorials hem de tenir en compte totes les eines que tenim al nostre abast:

- *Criteris numèrics de divisibilitat.*
- *Extracció de factor comú.*
- *Fórmules notables.*
- *Ruffini.*
- *Resolució d'equacions.*

EXEMPLES

$$E10.1: \quad a^2-1=a^2-1^2 \overset{\substack{identitat\\notable}}{=} (a+1)\cdot(a-1)$$

$$E10.2: \quad n^2-10n+25=n^2-10n+5^2 \overset{\substack{identitat\\notable}}{=} n^2-2n\cdot5+5^2=(n-5)^2$$

$$E10.3: \quad x^2-4xy+4y^2=(x)^2-4xy+(2y)^2 \overset{\substack{identitat\\notable}}{=} (x)^2-2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=(x+2y)^2$$

$$E10.4: \quad x^2+2x+1-y^2=(x+1)^2-y^2=[(x+1)+y]\cdot[(x+1)-y]$$

$$E11.5: \quad a^2-x^2+2xy-y^2=a^2-(x^2-2xy+y^2)=a^2-(x-y)^2=[a+(x-y)]\cdot[a-(x-y)]$$

$$E10.6: \quad (3x+9y)^2-(2x-5y)^2=[(3x+9y)+(2x-5y)]\cdot[(3x+9y)-(2x-5y)]=$$
$$=[5x+4y]\cdot[x+14y]$$

$$E10.7: \quad a^2c-a^2d-b^2d+b^2c=a^2\cdot(c-d)+b^2\cdot(-d+c)=(a^2+b^2)\cdot(c-d)$$

$$E10.8: \quad y^4-81x^4=y^4-(3x)^4=\left[y^2+(3x)^2\right]\cdot\left[y^2-(3x)^2\right]=\left[y^2+(3x)^2\right]\cdot(y+3x)\cdot(y-3x)$$

$E10.9: \quad P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x$

	1	+3	-9	-23	-12
-4		-4	4	20	12
	1	-1	-5	-3	0
-1		-1	+2	+3	
	1	-2	-3	0	
-1		-1	+3		
	1	-3	0		
3		+3			
	1	0			

Cada vegada que fem una divisió per Ruffini el grau del quocient disminueix en una unitat, per tant el darrer 1 correpon a $1x^1$, *llavors :*

$P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 - 12x = (x+4)(x+1)(x+1)(x-3)x$

$E10.10: \quad P(x) = 2x^2 - 2x - 12 = 2\cdot(x^2 - x - 6) = (*)$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow (x-3) \\ -2 \rightarrow (x+2) \end{cases}$$

$(*) = 2\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

11. EQUACIONS DE PRIMER GRAU

RECORDA:
Una equació és una igualtat entre dues expressions algebraiques que és veritable per a certs valors de la variable o incògnita, els quals són les solucions de l'equació.

REGLES PER RESOLDRE EQUACIONS DE 1r GRAU:

a) S'han d'eliminar tots els parèntesis i claudàtors que apareguin a l'equació.

b) Si hi ha denominadors, també s'han d'eliminar.

c) S'agrupen els termes semblants i s'aïlla la incògnita.

EXEMPLES

E11.1: $3x-1=5(4+2x) \rightarrow 3x-1=20+10x \rightarrow 3x-10x=20+1 \rightarrow$

$\rightarrow -7x=21 \rightarrow x=\dfrac{21}{-7} \rightarrow \underline{x=-3}\bullet$

E11.2: $\dfrac{4x-1}{3}=\dfrac{7x+2}{5} \rightarrow 5(4x-1)=3(7x+2) \rightarrow 20x-5=21x+6 \rightarrow$

$\rightarrow 20x-21x=6+5 \rightarrow -x=11 \rightarrow \underline{x=-11}\bullet$

E11.3:

$$3x-\frac{x+2}{4}=x-1-\frac{1-2x}{6} \xrightarrow{mcm(4,6)=12} \frac{36x}{12}-\frac{3x+6}{12}=\frac{12x-12}{12}-\frac{2-4x}{12} \rightarrow$$

$$\rightarrow 36x-3x-6=12x-12-2+4x \rightarrow 36x-3x-12x-4x=-12-2+6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 17x=-8 \rightarrow \underline{x=-\frac{8}{17}}\bullet$$

E11.4: $\frac{1}{2}\left(1-5x-\frac{1}{30}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{4x-1}{2}-\frac{1-3x}{6}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x+5}{2}\right)-\frac{3x-1}{4} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{2}-\frac{5x}{2}-\frac{1}{60}-\frac{4x-1}{10}+\frac{1-3x}{30}=\frac{8}{15}-\frac{4x+20}{6}-\frac{3x-1}{4} \xrightarrow[=60]{mcm(2,60,10,30,15,6,4)}$$

$$\rightarrow \frac{30}{60}-\frac{150x}{60}-\frac{1}{60}-\frac{24x-6}{60}+\frac{2-6x}{60}=\frac{32}{60}-\frac{40x+200}{60}-\frac{45x-15}{60} \rightarrow$$

$$\rightarrow 30-150x-1-24x+6+2-6x=32-40x-200-45x+15 \rightarrow$$

$$\rightarrow -150x-24x-6x+40x+45x=32-200+15-30+1-6-2 \rightarrow$$

$$\rightarrow -95x=-190 \rightarrow x=\frac{-190}{-95} \rightarrow \underline{x=2} \bullet$$

12. SISTEMES DE EQUACIONS DE 1r GRAU

RECORDA:

Les solucions d'un sistema d'equacions són els valors de les incògnites que satisfan totes les equacions a la vegada. Es poden donar tres casos:

a) Solució única per a cada incògnita: sistema COMPATIBLE DETERMINAT

b) Infinites solucions: sistema COMPATIBLE INDETERMINAT

c) No hi ha cap solució: sistema INCOMPATIBLE

MÈTODES DE RESOLUCIÓ DE SISTEMES DE DUES EQUACIONS DE 1r GRAU AMB DUES INCÒGNITES

a) Mètode de SUBSTITUCIÓ: s'aïlla una incògnita en una de les equacions i l'expressió obtinguda es fica a l'altra equació en el lloc d'aquesta incògnita.

b) Mètode d'IGUALACIÓ: s'aïlla la mateixa incògnita en totes dues equacions i s'igualen les dues expressions obtingudes.

c) Mètode de REDUCCIÓ: es tria la incògnita que es vol eliminar i es multiplica cada equació pel coeficient d'aquesta incògnita a l'altra equació (un dels dos coeficients es canvia de signe). Després es sumen les dues equacions obtingudes.

Aquests tres mètodes transformen el sistema d'equacions en una única equació amb una incògnita. Es resol aquesta equació i la solució obtinguda es substitueix en una de les equacions inicials per calcular la segona incògnita.

EXEMPLES

E12.1:

$$\left.\begin{array}{r}7x-2y=2\\3x+5y=36\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{en la 1a Eq}]{\text{Aillem } x} \frac{x=\frac{2+2y}{7}}{\dots}\xrightarrow[\text{en la 2a Eq}]{\text{SUBSTITUCIÓ}} 3\cdot\frac{2+2y}{7}+5y=36$$

$$\xrightarrow{\text{operem}}\frac{6+6y}{7}+5y=36\rightarrow 6+6y+35y=252\rightarrow 6y+35y=252-6\rightarrow$$

$$\rightarrow 41y=246\rightarrow y=\frac{246}{41}=6\xrightarrow[\text{on em aillat "}x\text{"}]{\text{substituim}} x=\frac{2+2\cdot 6}{7}=\frac{14}{7}=x=2\rightarrow$$

$$\rightarrow\underline{\left\{\begin{array}{l}x=2\\y=6\end{array}\right.}\bullet$$

E12.2:

$$\left.\begin{array}{r}4x+3y=2\\2x-5y=-12\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{en les dues equacions}]{\text{aillem la mateixa incògnita}}\left.\begin{array}{l}x=\frac{2-3y}{4}\\x=\frac{-12+5y}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{les incògnites}]{\text{IGUALEM}}\frac{2-3y}{4}=\frac{-12+5y}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow 2\cdot(2-3y)=4\cdot(-12+5y)\rightarrow 4-6y=-48+20y\rightarrow$$

$$\rightarrow -6y-20y=-48-4\rightarrow -26y=-52\rightarrow y=\frac{-52}{-26}=2\xrightarrow[\text{on hem aillat}]{\text{substituim}}$$

$$\rightarrow x=\frac{2-3\cdot 2}{4}=-1\rightarrow\underline{\left\{\begin{array}{l}x=-1\\y=2\end{array}\right.}\bullet$$

E12.3:

$$\left.\begin{array}{r}2x-5y=5\\3x+2y=17\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{REDUCCIÓ}}\left\{\begin{array}{r}(-3)\cdot(2x-5y=5)\\2\cdot(3x+2y=17)\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}-6x+15y=-15\\6x+\ \ 4y\ =\ \ 34\end{array}\right.\xrightarrow{\text{sumant les equacions}}$$

$$\rightarrow +19y=\ 19\rightarrow y=1\xrightarrow[\text{en la primera equació}]{\text{substituint per exemple}} 2x-5\cdot 1=5\rightarrow 2x-5=5\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{10}{2}=5\rightarrow\underline{\left\{\begin{array}{l}x=5\\y=1\end{array}\right.}\bullet$$

E12.4: *Moltes vegades s'ha de preparar el sistema abans d'aplicar cap mètode:*

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3x-2y}{2}-\dfrac{1+x}{3}=x-1\\[2mm]\dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{1+2y}{3}=2y-1\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{9x-6y}{6}-\dfrac{2+2x}{6}=\dfrac{6x-6}{6}\\[2mm]\dfrac{3x+6y}{6}-\dfrac{2+4y}{6}=\dfrac{12y-6}{6}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}9x-6y-2-2x=6x-6\\3x+6y-2-4y=12y-6\end{cases} \rightarrow \begin{cases}9x-2x-6x-6y=-6+2\\3x+6y-4y-12y=-6+2\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}x-6y=-4\\3x-10y=-4\end{cases} \xrightarrow{REDUCCIÓ} \begin{cases}(-3)\cdot 1^a: -3x+18y=12\\(1)\cdot 2^a:\ \ 3x-10y=-4\end{cases} \xrightarrow[equacions]{sumant} +8y=\ 8$$

$$\rightarrow\ y=1 \ \rightarrow\ x-6\cdot 1=-4 \ \rightarrow\ x=2 \ \rightarrow \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\bullet$$

1. OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS

1.1: $(-3)+(-2)+(-5)-(-1)-(-4)-(-5)=$

1.2: $(-2)+[3-5-(-2)+7]-[3-1-(-4)]=$

1.3: $5-[3-7+(-2)-(-3)]-[4+(-1)-(-5)-2]=$

1.4: $[2-(-5)+3]-[4+(-7)-3-(-2)]=$

1.5: $[7-9-(-2)]-[8+5-(-3)]\cdot[(-8)-4+10]=$

1.6: $(-12)\cdot[4+(-7)-2-(-8)]+3\cdot[(-10)-(-8)-4]=$

2. OPERACIONS AMB NOMBRES ENTERS I FRACCIONARIS

2.1: *a)* $2+\frac{1}{5}=$ *b)* $3-\frac{1}{4}=$ *c)* $5+\frac{2}{3}=$ *d)* $\frac{1}{2}-3=$

2.2: *a)* $2-\frac{5}{2}=$ *b)* $-1+\frac{1}{4}=$ *c)* $\frac{2}{3}-3=$ *d)* $\frac{1}{4}-5=$

2.3: *a)* $-2\cdot\frac{4}{3}=$ *b)* $-5\cdot\frac{-1}{2}=$ *c)* $-\frac{5}{6}\cdot 8=$ *d)* $\frac{-7}{2}\cdot(-3)=$

3. OPERACIONS AMB FRACCIONS

3.1: *a)* $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+4=$ *b)* $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=$

3.2: *a)* $2-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=$ *b)* $\frac{3}{5}+\frac{5}{4}-\frac{7}{10}=$

3.3: *a)* $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=$ *b)* $3\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{5}\cdot 5=$

3.4: *a)* $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=$ *b)* $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{6}}=$

3.5: *a)* $\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{2}{5}=$ *b)* $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}+2\right)=$

4. OPERACIONS AMB POTÈNCIES

Descomponeu els nombres enters en factors primers i després opereu amb les potències d'aquests factors primers:

4.1: $\dfrac{24^5 \cdot 18^4}{36^3 \cdot 54^2} =$

4.2: $\dfrac{12^6}{20^3} \cdot 75^2 =$

4.3: $\left(\dfrac{80^4}{45^5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{30^3}{48^6}\right)^2 =$

4.4: $72^3 \cdot \dfrac{6^4}{8^5} =$

4.5: $a)\ \left[(-2)^2\right]^3 =$ $\qquad b)\ \left(-2^2\right)^3 =$ $\qquad c)\ \left(-2^3\right)^2 =$

4.6: $a)\ \left(\left[(-1)^3\right]^2\right)^5 =$ $\qquad b)\ \left(\left[\left(-1^2\right)^3\right]^5\right)^3 =$ $\qquad c)\ \left(\left[\left(-1^2\right)^3\right]^4\right)^5 =$

5. OPERACIONS AMB EXPRESSIONS RADICALS (ARRELS)

5.1: $\sqrt[8]{45}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{50}}{\sqrt[8]{30}}=$

5.2: $\sqrt[5]{\dfrac{a^2b}{c^3}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{b^2c}{a^3}}=$

5.3: $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}}=$

5.4: $\sqrt{32}-\sqrt[4]{64}+\sqrt[6]{8}-\sqrt[8]{16}=$

5.5: Simplifica i racionalitza: $a)\ \sqrt{\dfrac{21600}{31104}}=$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{\dfrac{17496}{38880}}=$

6. POLINOMIS

Donats els polinomis:

$$A(x)=x^4+3x^3-7x^2-27x-18 \qquad i \qquad B(x)=x^3+x^2-8x-12$$

6.1 : *Calcula* $3\cdot A(x)-5\cdot B(x)$.

6.2 : *Multiplica* $A(x)$ *per* $B(x)$.

6.3 : *Divideix* $A(x)$ *entre* $B(x)$.

6.4 : *Fes la prova de la divisió anterior.* (*dividend = divisor per quocient més residu*).

6.5 : *Determina el valor de* $\underline{k}$ *perquè el polinomi* $P(x)=x^3+kx^2-4x-12$ *sigui divisible per* $(x+2)$.

6.6 : *Determina el valor de* $\underline{k}$ *perquè al dividir el polinomi* $P(x)=x^2+kx+5$ *entre* $(x-1)$ *dongui el mateix residu que al dividir-lo entre* $(x+2)$.

7. IDENTITATS NOTABLES

7.1: *Efectua*: a) $(3x+7)\cdot(3x-7)$ b) $(5x^3-2x)\cdot(5x^3+2x)$

7.2: *Calcula*: a) $(\sqrt{3}+2)^2$ b) $(\sqrt{3}-2)^2$

7.3: *Calcula*: a) $(x^2+4x)^2$ b) $(3x-8)^2$

7.4: *Efectua*: a) $(2x^2-3x)^3$ b) $(2-\sqrt{3})^3$

7.5: *Efectua*: a) $(x^2-2x+3)^2$

8. FACTOR COMÚ

Treure factor comú en les següents expressions:

9.1: $x^2-x\cdot y$ 9.4: $20m-30m^2$ 9.7: $24x^2y^3z-40xy^2z^3$

9.2: $10x^2-5x$ 9.5: $16x^2+12x$ 9.8: $x^2yz-xy^2z+xyz^2$

9.3: $12b^3+8b^2$ 9.6: $15a^2b-20ab^2$ 9.9: $24a^3+20a^2b-16ab^2$

9.10: $20m^4-15m^3+10m^2-m$

9. DESCOMPOSAR EN FACTORS

9.1: $x^2 - 4$

9.2: $100 - b^2$

9.3: $9x^2 - y^2$

9.4: $a^2 - 25b^2$

9.5: $36x^2 - 49y^2$

9.6: $x^2 - \frac{1}{9}$

9.7: $\frac{1}{64} - 9a^2$

9.8: $x^4 - y^2$

9.9: $3a^3 - 3ax^2$

9.10: $a^4 - 1$

10. EQUACIONS DE 1r GRAU

10.1: $$\frac{3x-5}{2} - \frac{2x+3}{5} - \frac{5x+3}{4} = 4x - \frac{15x+1}{2}$$

10.2: $$\frac{2x-5}{3} - \frac{2-3x}{4} = \frac{4x+8}{3} - \frac{x-2}{2}$$

10.3: $$3(2x-1) - 5(4x+3) = 2(3x-8)$$

10.4: $$3(2x-1) = \frac{4x-2}{5}$$

10.5: $$\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{5} = 2x - 2$$

10.6: $$2 \cdot \frac{x+5}{3} = x - 2$$

10.7: $$\frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1 - \frac{x+5}{6}$$

10.8: $$\frac{1}{5}(2-4x) - \frac{1}{3}(1-3x) = 0$$

11. SISTEMES DE EQUACIONS DE 1r GRAU

11.1 Resol pel mètode de SUBSTITUCIÓ:

$a)\ \left.\begin{array}{l} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 34 \end{array}\right\}$ $\qquad b)\ \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 23 \\ 3x + 2y = 27 \end{array}\right\}$

11.2 Resol pel mètode de IGUALACIÓ:

$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 5x - 2y = -33 \end{array}\right\}$ $\qquad b)\ \left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 19 \\ 3x - 4y = -6 \end{array}\right\}$

11.3 Resol pel mètode de REDUCCIÓ:

$a)\ \left.\begin{array}{l} 5x - y = 8 \\ 2x + 3y = 27 \end{array}\right\}$ $\qquad b)\ \left.\begin{array}{l} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{array}\right\}$

Simplifica i resol els següents sistemes pel mètode que vulguis:

11.4: $\left.\begin{array}{l} \frac{4x+5y}{2} - \frac{x+3y}{3} = 2x + y - 2 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y-1}{3} = y + 5 \end{array}\right\}$

11.5: $\left.\begin{array}{l} 3(x - 2y) - 2(5x + y) = x - y + 5 \\ 5x + 3y + 1 = x \end{array}\right\}$